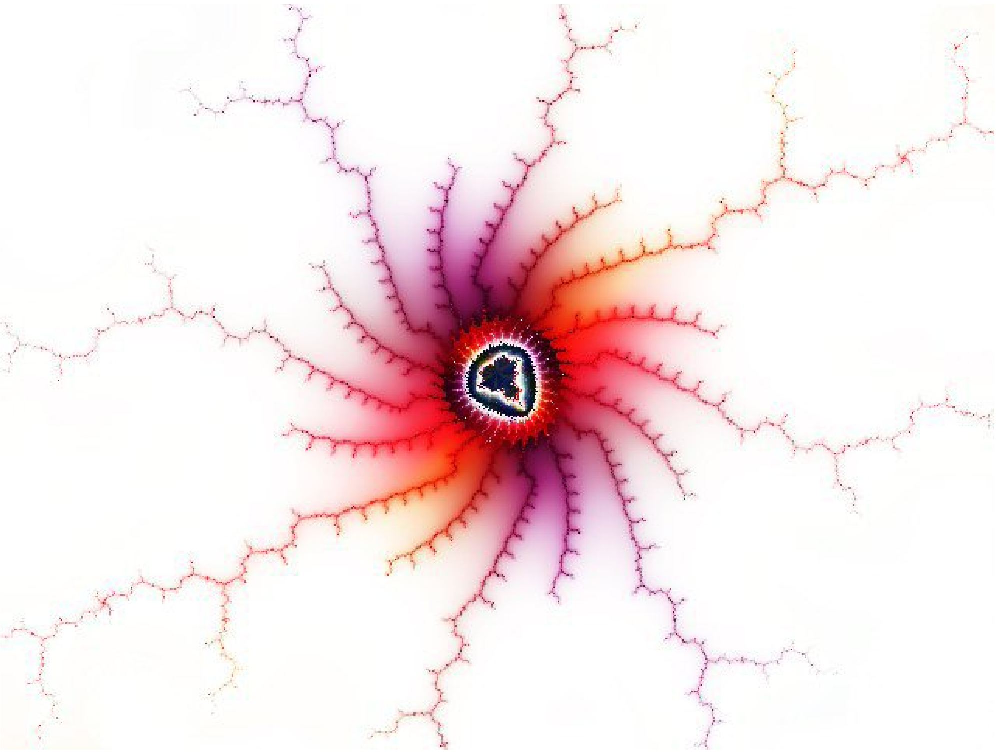
Funzioni inverse e disequazioni



LORENZO ROI

Edizioni H–ALPHA

Il disegno di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot centrato in $(-1.2897200621, 0.43530057)$ e ingrandito 7.6799275×10^8 volte.

Titolo: `Sfumature frattali`.

INDICE

CAPITOLO 1

1.1 Funzioni inverse delle goniometriche

I grafici delle funzioni, definite in $\mathbb{R}$, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = \operatorname{tg} x$, sono a tutti noti (figg. 1.1, 1.2). Questi suggeriscono con immediatezza la non invertibilità delle funzioni circolari in quanto, se ad $\forall\ x \in \mathbb{R}$ corrisponde una sola y (a parte i valori $x = \pi/2 + k\pi$ dove la tangente non è calcolabile), ad una y in genere, corrispondono più valori di x.

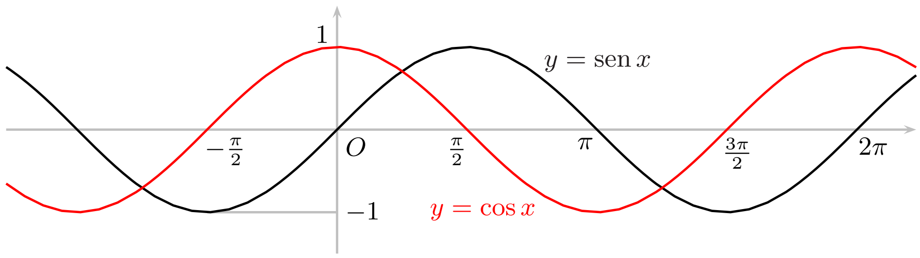


Fig. 1.1. Grafici del seno e del coseno.

Trattandosi di funzioni periodiche, la corrispondenza

$$\forall\ y\ \ \exists!\, x \mid x = f^{-1}(y)$$

non è soddisfatta e quindi le funzioni sopraddette non sono delle biiezioni. Inoltre in $\mathbb{R}$ non sono monotòne.

Ricordando quanto detto al riguardo dell'esistenza delle applicazioni inverse*, sappiamo che affinché si possa parlare di funzione inversa è necessario che $f : x \to y$

* § 2.5 della dispensa sulle funzioni.

sia iniettiva. D'altra parte osservando i grafici delle funzioni circolari è possibile determinare degli intervalli, sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, dove le funzioni stesse sono iniettive (figg. 1.1, 1.2).

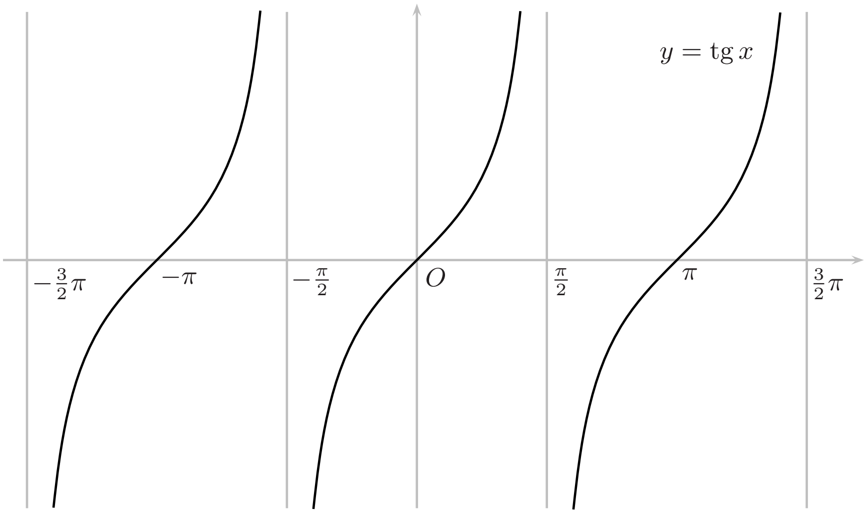


Fig. 1.2. Grafico della tangente.

Rispettivamente per il seno, coseno e tangente, le possibili restrizioni del loro dominio negli intervalli $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\text{seno:} && \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \\ &\text{coseno:} && \big[k\pi, (k+1)\pi\big] \\ &\text{tangente:} && \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

permettono di ridefinire delle funzioni invertibili. In tal modo possiamo disporre di due funzioni

$$f : A \longrightarrow B \qquad f^{-1} : B \longrightarrow A$$

che sappiamo* soddisfano alle

$$f^{-1} \circ f = I_A \qquad f \circ f^{-1} = I_B\,,$$

dove la prima rappresenta l'identità in A e la seconda quella in B: scritte in termini di equazioni rappresentative, assumono la forma

$$f^{-1}\big[f(x)\big] = x \quad \text{per} \quad \forall\, x \in A \tag{1.1}$$

$$f\big[f^{-1}(y)\big] = y \quad \text{per} \quad \forall\, y \in B \tag{1.2}$$

* § 2.6 della dispensa già citata.

Si sceglie pertanto di *restringere la funzione seno* nell'insieme

$$\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right],$$

intervallo su cui è strettamente crescente; l'inversa quindi di

$$\operatorname{sen}: x \longrightarrow y$$

o più esplicitamente

$$y = \operatorname{sen} x \qquad \text{con} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad y \in [-1\,, +1]$$

si chiama arcoseno, si indica con il simbolo *arcsen*

$$\operatorname{arcsen}: y \longrightarrow x$$

ed è tale che

$$x = \operatorname{arcsen} y \qquad \text{con} \quad y \in [-1, 1] \quad \text{e} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Tenendo presente il teorema che assicura il medesimo carattere di monotonia sia per la funzione f che per la sua inversa f^{-1}, tale funzione risulta essere una biiezione strettamente crescente dell'intervallo $[-1, 1]$ sull'intervallo $[-\pi/2\,, \pi/2]$. Per ogni $y \in [-1, 1]$, $x = \operatorname{arcsen} y$ è perciò l'unico numero reale $x \in [-\pi/2\,, \pi/2]$ tale che $y = \operatorname{sen} x$ ossia x è *l'arco (o angolo) il cui seno è* y.

Il grafico della funzione $x = \operatorname{arcsen} y$ risulta essere nient'altro che quello della funzione seno "ristretto" nel già detto intervallo. Difatti per conoscere i valori della funzione arcoseno è sufficiente leggere a rovescio la tabella dei valori del seno per gli intervalli sopra definiti.

D'altra parte onde mantenere la convenzione che associa alla variabile indipendente la lettera x e a quella dipendente la y, possiamo risalire al grafico della funzione $Y = \operatorname{arcsen} X$ (fig. 1.3) considerando quello simmetrico al grafico di $y = \operatorname{sen} x$ ottenuto con una simmetria assiale avente per asse la bisettrice $b: y = x$ del I e III quadrante ed espressa dalla equazioni*

$$\begin{cases} X = y \\ Y = x\,. \end{cases}$$

* § 3.3 della dispensa sulle funzioni.

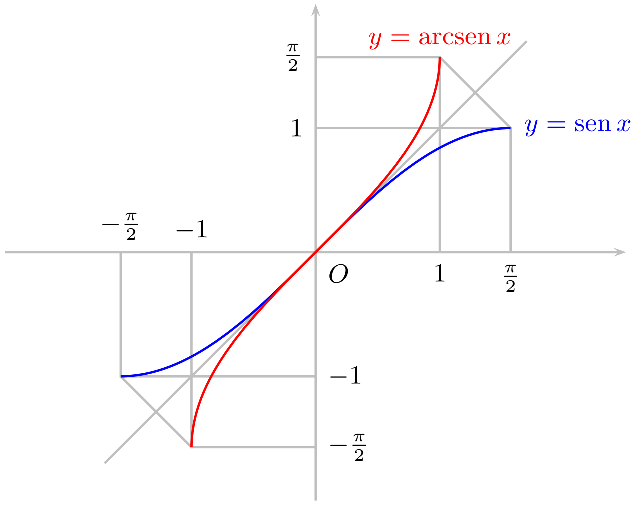


Fig. 1.3. Grafici del seno, dell'arcoseno e proprietà di simmetria.

Da tale rappresentazione risulta immediato rilevare la simmetria dispari della funzione *arcoseno* cioè la validità dell'identità

$$\operatorname{arcsen}(-x) = -\operatorname{arcsen}(x) \quad x \in [-1, 1]\,,$$

diretta conseguenza dell'analoga proprietà del seno.

Pure evidente emerge la già nominata proprietà di monotonia strettamente crescente rappresentata dalle disequazioni

$$x_1 < x_2 \iff \operatorname{arcsen} x_1 < \operatorname{arcsen} x_2 \qquad \text{con} \qquad x_1, x_2 \in [-1, 1] \tag{1.3}$$

e che discendono da quelle per il seno

$$x_1 < x_2 \iff \operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2 \qquad \text{con} \qquad x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{1.4}$$

Infine si osservi che l'analoga di (1.1) risulta essere

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x \quad \iff \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right] \tag{1.5}$$

mentre, per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x'$$

dove x' è l'unico punto di $[-\pi/2\,, \pi/2]$ tale che

$$\operatorname{sen} x' = \operatorname{sen} x$$

(si veda la fig. 1.4 e il successivo esercizio).

Per ogni $x \in [-1, 1]$ si ha poi

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x\,, \tag{1.6}$$

che costituisce il caso particolare della (1.2), dove va ricordato che la y è stata rinominata x.

Esercizio 1.1. *A conferma del fatto che in generale $x' = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ implica $x' \neq x$ si propone lo studio del grafico delle seguenti funzioni in $\mathbb{R}$:*

$$y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) \qquad\qquad y = \arccos(\cos x)$$

e di $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ definita per $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\}$ con $k \in \mathbb{Z}$. Calcolando le diverse funzioni in un numero sufficiente di punti (con il calcolatore tascabile, ma si può pure affrontare il problema formalmente), emerge con evidenza che $y \neq x$. (La figura successiva mostra come la prima funzione mappi un qualsiasi valore esterno a $[-\pi/2, \pi/2]$ nell'intervallo stesso.)

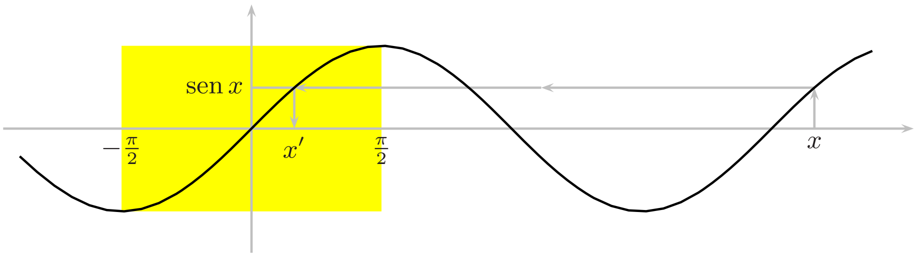


Fig. 1.4. Significato di $x' = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$.

Procedendo analogamente, per la funzione *coseno* si sceglie la restrizione nell'intervallo $[0, \pi]$, in tal modo inducendo una biiezione *strettamente decrescente* di questo intervallo su $[-1, 1]$. L'inversa quindi di

$$\cos\,: x \longrightarrow y$$

ossia

$$y = \cos x \qquad \text{con} \qquad x \in [0\,, \pi] \quad \text{e} \quad y \in [-1\,, 1]$$

si chiama arcocoseno, viene indicata dalla scrittura *arccos* e simbolicamente come

$$\arccos\,: y \longrightarrow x\,,$$

ed è tale che

$$x = \arccos y \qquad \text{con} \quad y \in [-1, +1] \quad \text{e} \quad x \in [0\,, \pi]\,.$$

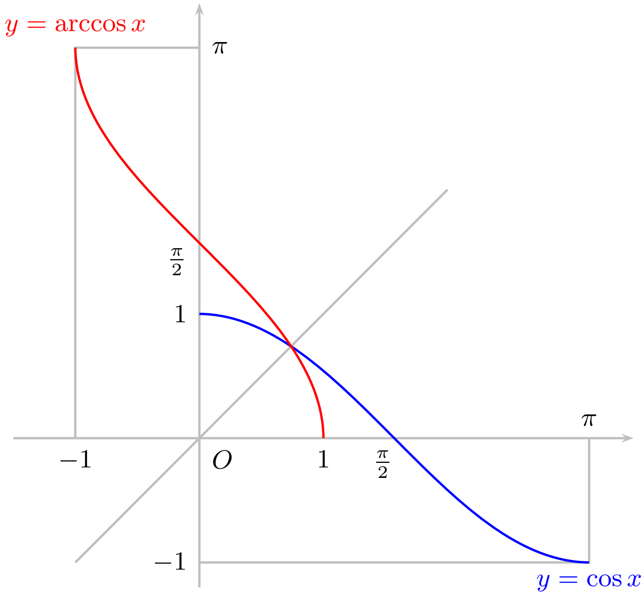


Fig. 1.5. Grafici del coseno e dell'arcocoseno.

Per ogni $y \in [-1, 1]$, $x = \arccos y$ è perciò l'unico numero reale $x \in [0\,, \pi]$ tale che $y = \cos x$ ossia x è *l'arco (o angolo) il cui coseno è* y.

Sottoponendo il grafico del coseno alla simmetria assiale che scambia gli assi coordinati e definita sopra, si ottiene quello della funzione $y = \arccos x$ (fig. 1.5).

Le proprietà di monotonia strettamente decrescente si sintetizzano nelle

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \arccos x_1 > \arccos x_2 \qquad \text{con} \qquad x_1, x_2 \in [-1, 1] \tag{1.7}$$

che discendono da quelle per il coseno

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \cos x_1 > \cos x_2 \qquad \text{con} \qquad x_1, x_2 \in [0\,, \pi]\,. \tag{1.8}$$

Le analoghe espressioni di (1.1) e (1.2) sono:

$$\arccos(\cos x) = x \Longleftrightarrow x \in [0\,, \pi] \tag{1.9}$$

$$\cos(\arccos x) = x \qquad \text{per} \quad \forall\, x \in [-1\,, 1]\,. \tag{1.10}$$

Va notato ancora che la (1.9) vale *se e solo se* $x \in [0, \pi]$ mentre se non appartiene a questo intervallo è $\arccos(\cos x) \neq x$ ossia, in generale è

$$\arccos(\cos x) = x'$$

dove x' risulta quel numero appartenente a $[0\,,\pi]$ che soddisfa alla $\cos x' = \cos x$ (vedi esercizio 1.1).

Infine restringendo la funzione *tangente* all'intervallo $]-\pi/2\,,\pi/2[$ si ottiene una biiezione strettamente crescente di questo intervallo in $\mathbb{R}$. L'inversa di

$$\mathrm{tg}\ : x \longrightarrow y$$

cioè

$$y = \mathrm{tg}\, x \qquad \text{con} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R}$$

viene detta arcotangente, è identificata dai simboli *arctg* o *arctan* cioè

$$\mathrm{arctg} : y \longrightarrow x$$

ed è tale che

$$x = \mathrm{arctg}\, y \qquad \text{con} \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Il numero $x = \mathrm{arctg}\, y$ rappresenta quell'unico valore reale che soddisfa alla $y = \mathrm{tg}\, x$ ossia x esprime *l'arco (o angolo) la cui tangente è* y. Il grafico (fig. 1.6), ottenuto con la consueta operazione di simmetria, evidenzia la simmetria dispari della funzione e la sua monotonia strettamente crescente.

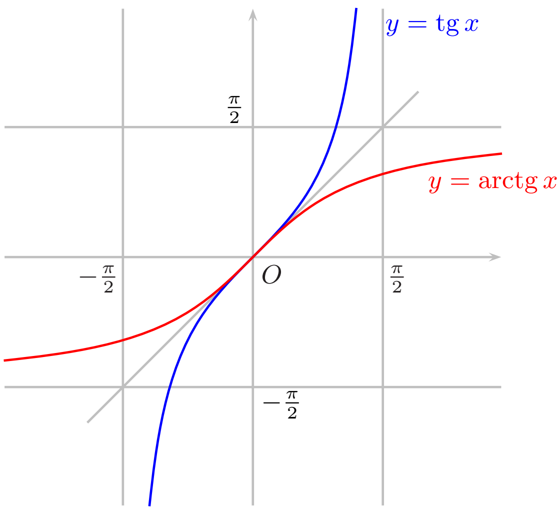


Fig. 1.6. Grafici della tangente e arcotangente.

Valgono pertanto le seguenti identità e relazioni:

simmetria: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
monotonia: $x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2 \quad \text{con} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (1.11)

che discendono da quelle per la tangente

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2 \qquad \text{con} \qquad x_1, x_2 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \tag{1.12}$$

Inoltre, con considerazioni analoghe a quelle fatte per il seno e coseno è

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \Longleftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{1.13}$$

mentre

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \tag{1.14}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

È interessante notare l'andamento asintotico della funzione $y = \operatorname{arctg} x$ e che discende da quello della tangente, avendo questa due asintoti verticali di equazioni $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$. Con scrittura informale risulta,

$$x \longrightarrow +\infty \qquad y \longrightarrow +\frac{\pi}{2}$$

$$x \longrightarrow -\infty \qquad y \longrightarrow -\frac{\pi}{2},$$

espressioni che nell'Analisi verranno riprese entro un opportuno quadro teorico.

Per concludere è facile dimostrare la seguente identità:

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Difatti posto $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, discende $x = \operatorname{sen} \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$. Poiché

$$-\pi/2 < \alpha < \pi/2$$

risulta pure

$$0 < (\pi/2 - \alpha) < \pi$$

cosicché

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \arccos x$$

da cui la tesi.

1.2 Equazioni goniometriche elementari

Volendo risolvere le equazioni goniometriche elementari

$$\operatorname{sen} x = m \qquad \cos x = m \qquad \operatorname{tg} x = n$$

e ricollegandoci alle osservazioni finali fatte per ciascuna delle funzioni inverse sopra definite, possiamo dire che se $m \notin [-1, 1]$ le prime due non hanno soluzioni, mentre se $m \in [-1\,, 1]$ l'equazione $\operatorname{sen} x = m$ possiede infinite soluzioni. Difatti, riscrivendo l'equazione $\operatorname{sen} x = m$ nella forma

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = m, \end{cases}$$

è possibile identificare la ricerca delle sue soluzioni con quella delle ascisse dei punti di intersezione delle due funzioni del sistema. Poiché i grafici di queste ultime sono noti, osservando la fig. 1.7, è possibile concludere che le soluzioni costituiscono un insieme numerabile di numeri reali.

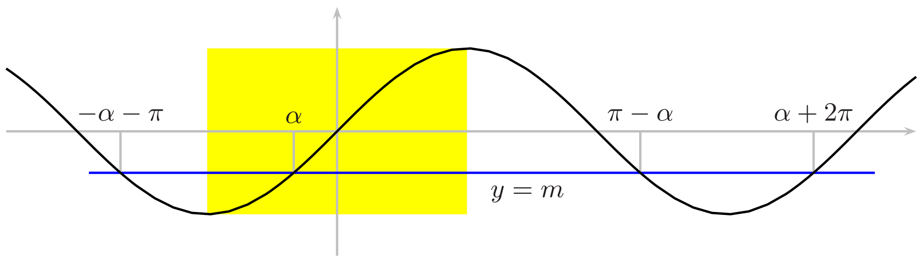


Fig. 1.7. Interpretazione grafica dell'equazione $\operatorname{sen} x = m$.

Per determinare questo insieme è sufficiente conoscere un unico valore α dell'angolo (si veda la fig. 1.7) con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ in corrispondenza del quale il seno vale m ossia $\operatorname{sen} \alpha = m$. Tale valore α è fornito dalla funzione $\alpha = \operatorname{arcsen} m$ cosicché l'insieme cercato si può rappresentare tramite le espressioni

$$x = \operatorname{arcsen} m + 2k\pi \quad \text{e} \quad x = \pi - \operatorname{arcsen} m + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

per le quali esiste pure una forma più compatta

$$x = (-1)^k \operatorname{arcsen} m + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Analogamente, se $m \in [-1\,, 1]$ l'equazione $\cos x = m$ si può interpretare come l'intersezione delle due funzioni

$$\begin{cases} y = \cos x \\ y = m. \end{cases}$$

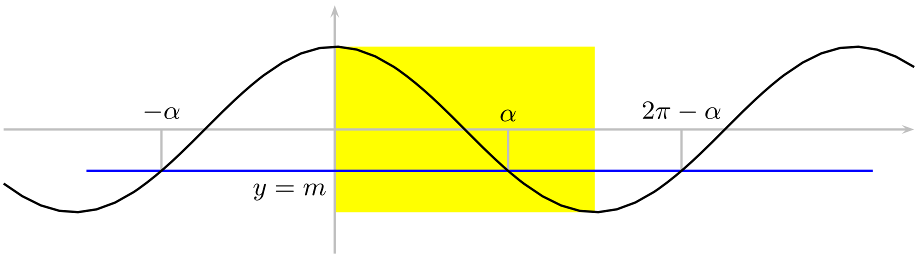


Fig. 1.8. Interpretazione grafica dell'equazione $\cos x = m$.

Osservando la fig. 1.8 e determinato quell'unico valore dell'angolo il cui coseno vale m cioè $\alpha = \arccos m$ con $\alpha \in [0, \pi]$, le soluzioni sono date da

$$x = \pm \arccos m + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Infine l'interpretazione dell'equazione $\operatorname{tg} x = n$ con n reale qualsiasi tramite il sistema

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} x \\ y = n, \end{cases}$$

(fig. 1.9) conduce alle soluzioni

$$x = \operatorname{arctg} n + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

essendo $\alpha = \operatorname{arctg} n$.

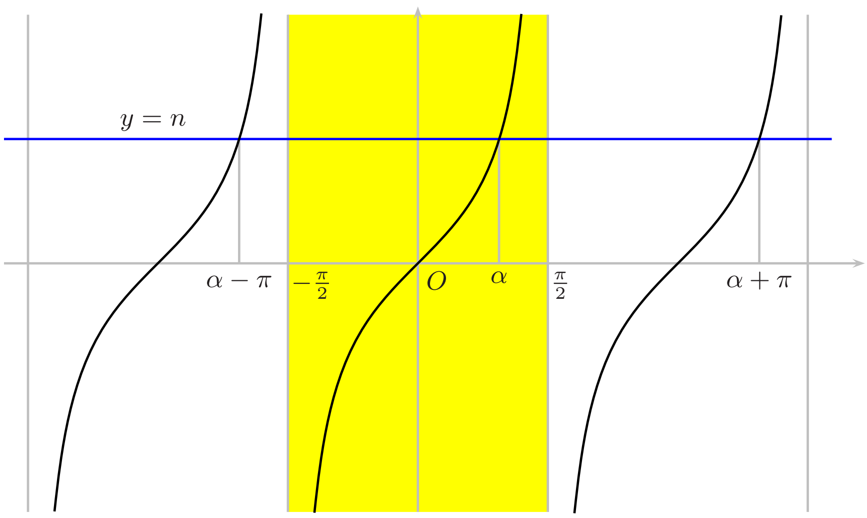


Fig. 1.9. Interpretazione grafica dell'equazione $\operatorname{tg} x = n$.

Le equazioni $\operatorname{sen} x = m$, $\cos x = m$ e $\operatorname{tg} x = n$ possiedono pure una diversa interpretazione che spesso risulta più comoda ed immediata. Difatti tenendo presenti le definizioni del seno e del coseno è noto che si pone $\operatorname{sen} x = y_P$ e $\cos x = x_P$ cioè, il seno di un angolo è interpretabile come l'ordinata di un punto P appartenente alla circonferenza goniometrica γ e individuato dal lato variabile dell'angolo x: il coseno invece ne rappresenta l'ascissa. Da ciò segue che l'equazione $\operatorname{sen} x = m$ si può riscrivere come $y_P = m$. Poiché $P \in \gamma$ allora $x_P^2 + y_P^2 = 1$ per cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y_P = m \\ x_P^2 + y_P^2 = 1, \end{cases}$$

e la ricerca delle soluzioni dell'equazione goniometrica iniziale equivale dal punto di vista geometrico all'individuazione delle intersezioni della retta orizzontale $y_P = m$ con la circonferenza goniometrica (vedi fig. 1.10).

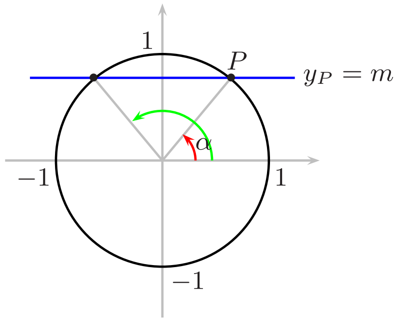


Fig. 1.10. Interpretazione alternativa dell'equazione $\operatorname{sen} x = m$.

Per il coseno invece l'equazione $\cos x = m$ diviene $x_P = m$ per cui la ricerca delle sue soluzioni si riconduce alla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x_P = m \\ x_P^2 + y_P^2 = 1, \end{cases}$$

costituito da una retta verticale e dalla circonferenza goniometrica (fig. 1.11).

Nel caso della $\operatorname{tg} x = n$ poiché $\operatorname{tg} x = y_Q$ con Q punto della retta $t : x = 1$ tangente a γ in $(1, 0)$, l'equazione iniziale si può riscrivere come $y_Q = n$ ed equivale a determinare il punto Q di t che possiede ordinata pari a n (fig. 1.12).

Onde evitare comunque facili fraintendimenti va sottolineato che le interpretazioni grafiche proposte per le equazioni goniometriche elementari costituiscono essenzialmente un supporto visivo alla risoluzione in quanto solo la conoscenza delle

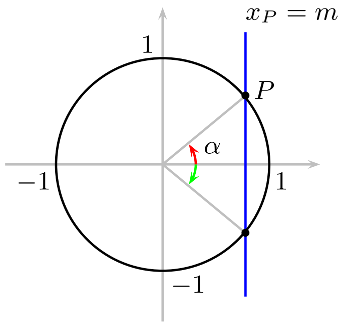


Fig. 1.11. Interpretazione alternativa dell'equazione $\cos x = m$.

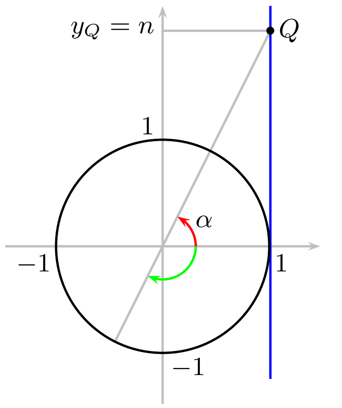


Fig. 1.12. Interpretazione alternativa dell'equazione $\operatorname{tg} x = n$.

funzioni inverse delle goniometriche permette di definire correttamente l'angolo α e quindi l'insieme delle soluzioni (nel caso ovviamente che questo insieme non sia vuoto).

1.3 Disequazioni goniometriche elementari

La risoluzione delle disequazioni elementari e quindi della forma

$$\operatorname{sen} x > m \qquad \cos x > m \qquad \operatorname{tg} x > n$$

oppure della

$$\operatorname{sen} x < m \qquad \cos x < m \qquad \operatorname{tg} x < n$$

si può facilmente ricondurre alla risoluzione delle relative *equazioni associate*. Difatti volendo risolvere $\operatorname{sen} x > m$ e supposto $m \in [-1, 1]$, la ricerca dei valori di

x per cui la precedente disequazione si riduce ad una diseguaglianza vera, equivale alla determinazione delle ascisse dei punti del grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$ che possiedono ordinata maggiore dei corrispondenti punti appartenenti alla retta $y = m$ (evidenziati in rosso in fig. 1.13). In base alla figura è quindi immediato dedurre che ciò si verifica per tutte le x appartenenti agli intervalli

$$\alpha + 2k\pi < x < (\pi - \alpha) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

dove α si ottiene ancora tramite $\alpha = \operatorname{arcsen} m$.

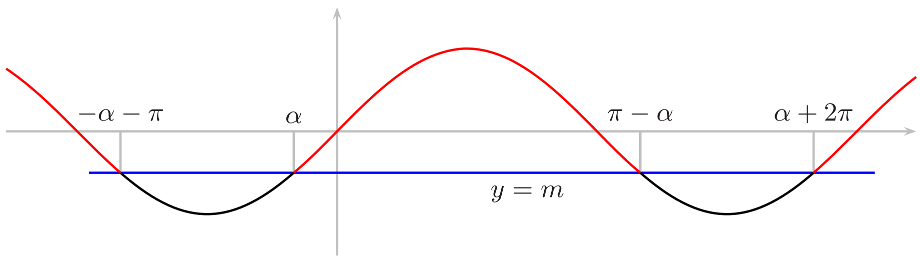


Fig. 1.13. Interpretazione grafica della disequazione $\operatorname{sen} x > m$.

Se invece si vogliono ricercare le soluzioni di $\operatorname{sen} x < m$, dallo stesso grafico si deduce che queste sono rappresentate dall'insieme di valori (in nero)

$$(-\pi - \alpha) + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

In modo del tutto analogo si può interpretare la disequazione $\cos x > m$ per cui, in base al grafico di fig. 1.8 discende che le soluzioni saranno rappresentate dall'insieme

$$\cos x > m \iff -\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

con $\alpha = \arccos m$. Se invece si vuole $\cos x < m$, le soluzioni sono individuate dalla scrittura

$$\cos x < m \iff \alpha + 2k\pi < x < (2\pi - \alpha) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nel caso che sia $m \notin [-1, 1]$ le soluzioni delle relative disequazioni si ottengono immediatamente in quanto è noto il codominio della funzione seno: allora se

$$\begin{aligned} m > 1 \ \wedge \ \operatorname{sen} x > m \quad &\Longrightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R} \\ m < -1 \ \wedge \ \operatorname{sen} x > m \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ m > 1 \ \wedge \ \operatorname{sen} x < m \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ m < -1 \ \wedge \ \operatorname{sen} x < m \quad &\Longrightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Analoghe espressioni si ottengono sostituendo al $\operatorname{sen} x$ il $\cos x$.

Infine, riprendendo il grafico di fig. 1.9, e con le medesime modalità discende

$$\operatorname{tg} x > n \iff \alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{con } \alpha = \operatorname{arctg} n \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

oppure

$$\operatorname{tg} x < n \iff -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi \qquad \text{con } \alpha = \operatorname{arctg} n \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Sulla base invece dell'interpretazione che fa uso della circonferenza goniometrica γ, gli angoli che soddisfano alla $\operatorname{sen} x > m$ sono individuati dai punti di γ che appaiono in rosso nella figura 1.14a. I punti di γ che soddisfano alla $\cos x > m$ sono invece evidenziati sempre in rosso in figura 1.14b. Infine per la tangente si può utilizzare una rappresentazione del tipo di figura 1.15 che mette in evidenza i punti di γ che soddisfano alla $\operatorname{tg} x > n$.

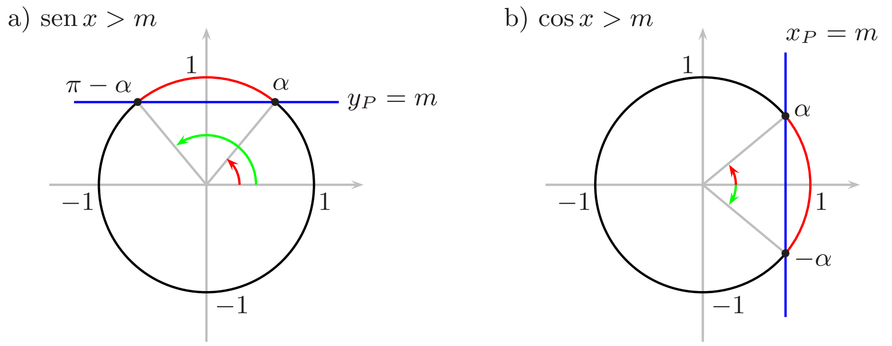


Fig. 1.14. Interpretazioni grafiche alternative per $\operatorname{sen} x > m$ e $\cos x > m$.

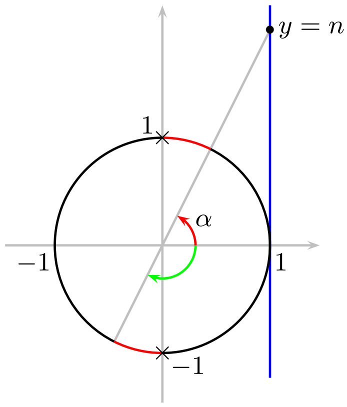


Fig. 1.15. Interpretazione grafica alternativa della disequazione $\operatorname{tg} x > n$.

CAPITOLO 2

2.1 Funzioni lineari in seno e coseno

Il problema che si vuole affrontare è di studiare le caratteristiche generali della funzione lineare in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ di equazione

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x + c$$

detta anche *funzione omogenea di primo grado*.*

Iniziamo con alcune semplici osservazioni introduttive. Le proprietà e il grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$ sono ben noti. Più in generale, se consideriamo l'espressione $y = a \operatorname{sen} x$ con a costante reale qualsiasi, il codominio è allora l'insieme dei valori reali compresi tra $-a$ e a ossia l'intervallo chiuso $[-a, a]$: difatti essendo $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ moltiplicando per a è pure $-a \leq a \operatorname{sen} x \leq a$. Il grafico di $y = a \operatorname{sen} x$ è sostanzialmente analogo a quello del seno a parte quindi il codominio e il coefficiente a si dice *ampiezza* ed esprime l'entità dello "stiramento" subito dalla funzione seno (fig. 2.1). Analoghe osservazioni si possono fare ovviamente anche per il coseno.

Consideriamo ora la funzione

$$f : x \longrightarrow y = a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \tag{2.1}$$

dove a, b, c rappresentano delle costanti reali date. Questa è definita per $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ossia si può calcolare per qualsiasi valore di x in quanto costruita con le funzioni

* In taluni testi viene detta omogenea di primo grado la funzione avente il termine noto $c = 0$.

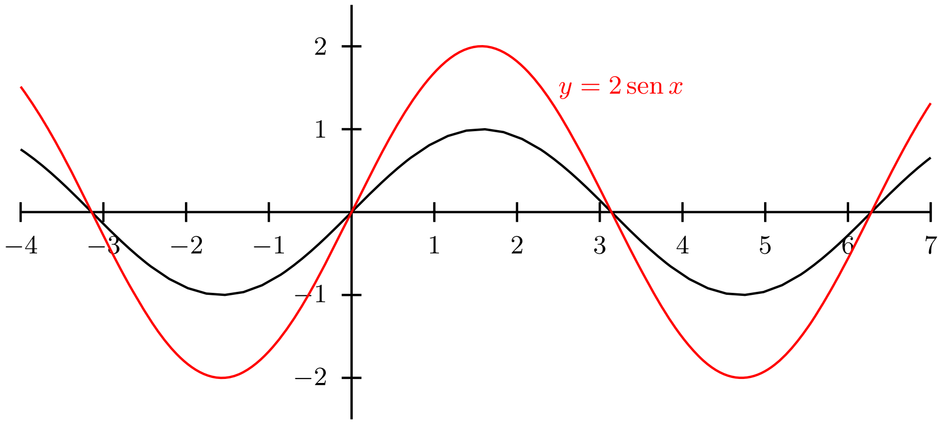


Fig. 2.1. Grafici delle funzioni $y = \mathrm{sen}\,x$ e $y = a\,\mathrm{sen}\,x$ per $a = 2$.

seno e coseno ovunque calcolabili e con operazioni di addizione e moltiplicazione. Il dominio è pertanto l'insieme $\mathbb{R}$. Poiché

$$\mathrm{sen}(x + 2\pi) = \mathrm{sen}\,x \quad \text{e} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

la (2.1) per la

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= a\,\mathrm{sen}(x + 2\pi) + b\cos(x + 2\pi) + c \\ &= a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x + c = f(x) \end{aligned}$$

risulta periodica con periodo $T = 2\pi$: ciò significa che il suo grafico si ripeterà sul piano cartesiano ad intervalli di ampiezza 2π analogamente a quanto succede per il seno e il coseno.

Supponiamo $a \neq 0$ (successivamente discuteremo $a = 0$): allora (2.1) si può riscrivere come

$$\begin{aligned} y = a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x + c &= a\,\mathrm{sen}\,x + \frac{ab}{a}\cos x + c \\ &= a\left(\mathrm{sen}\,x + \frac{b}{a}\cos x\right) + c. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il numero b/a è noto e poiché sappiamo che la tangente assume tutti i valori reali quando il suo angolo varia tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, in corrispondenza al valore b/a è sempre possibile determinare un angolo α con $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tale che

$$\mathrm{tg}\,\alpha = b/a.$$

L'angolo α è fornito dalla funzione inversa della tangente ossia

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right),$$

per cui la (2.2) diviene

$$y = a(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg}\alpha \cos x) + c = a\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cos x\right) + c :$$

eseguendo il minimo comune denominatore all'interno della parentesi

$$y = a\left(\frac{\operatorname{sen} x \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cos x}{\cos\alpha}\right) + c$$

e ricordando la formula di addizione per il seno, $\operatorname{sen}(x+\alpha) = \operatorname{sen} x \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cos x$ abbiamo

$$y = \frac{a \operatorname{sen}(x+\alpha)}{\cos\alpha} + c = \left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)\operatorname{sen}(x+\alpha) + c. \tag{2.3}$$

Il coefficiente

$$A = \frac{a}{\cos\alpha} \tag{2.4}$$

è una costante che può essere espressa tramite a e b: difatti basta esprimere $\cos\alpha$ in termini di $\operatorname{tg}\alpha$ che è nota e poiché $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ è pure $\cos\alpha > 0$, per cui

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad : \quad \text{sostituendo} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \\
\cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

e (2.4) diviene

$$A = \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{a}{\left(\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)} = \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2+b^2}. \tag{2.5}$$

In definitiva $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x + c$ si può riscrivere come

$$y = A \operatorname{sen}(x + \alpha) + c \tag{2.6}$$

con A definito dalla (2.5) e l'angolo α dalla $\alpha = \operatorname{arctg}(b/a)$.

La forma appena ottenuta per la funzione f suggerisce di applicare a questa una semplice traslazione.* Difatti, portando a primo membro la costante c risulta $y - c = A \operatorname{sen}(x + \alpha)$ per cui definita la traslazione

$$\tau : \begin{cases} y' = y - c \\ x' = x + \alpha \end{cases} \quad \text{e la sua inversa} \quad \tau^{-1} : \begin{cases} y = y' + c \\ x = x' - \alpha, \end{cases} \tag{2.7}$$

la funzione trasformata f' assume la forma

$$y' = A \operatorname{sen} x'$$

il cui grafico Γ' per quanto detto all'inizio, è noto. f' non è altro che la funzione seno avente un'ampiezza pari ad A (fig. 2.2).

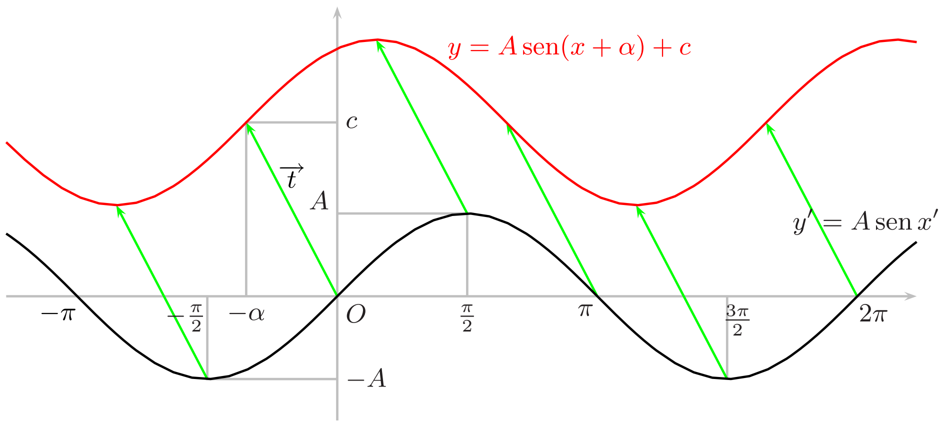


Fig. 2.2. Grafico di f ottenuto come traslazione di $y' = A \operatorname{sen} x'$.

Risulta ora immediato risalire al grafico Γ della funzione originaria f. Difatti riprendendo le equazioni (2.7) della traslazione inversa τ^{-1}

$$\begin{cases} y = y' + c \\ x = x' - \alpha, \end{cases}$$

emerge che Γ si ottiene traslando il grafico di f' del vettore $\overrightarrow{t} = (-\alpha, c)$ (fig. 2.2) ossia, usando termini meno formali ma comunque sufficientemente descrittivi, Γ

* Si veda a tale proposito il § 3.5 della dispensa sulle trasformazioni.

si deduce traslando verso "sinistra" quello di f' di una quantità pari ad α se $\alpha > 0$ (viceversa se $\alpha < 0$) e verso la direzione positiva dell'asse delle ordinate se $c > 0$ (viceversa se $c < 0$).

Per esempio il punto $(0, 0)$ di f' è immagine tramite τ del punto di coordinate $(-\alpha, c)$. Pertanto riferendoci al grafico di f', α esprime l'entità della traslazione orizzontale mentre c determina quella verticale. Con una terminologia mutuata dalla Fisica α viene detto *termine di sfasamento* e molto spesso semplicemente *"fase"*.

In definitiva, il grafico della funzione lineare $f : x \to a \operatorname{sen} x + b \cos x + c$ si ottiene traslando opportunamente il grafico generalmente "stirato" della funzione seno.*

Rimane da trattare l'eventualità che sia $a = 0$. In tali ipotesi la (2.1) si riduce a $y = b \cos x + c$ che si può riscrivere come

$$y - c = b \cos x.$$

Definita la traslazione di equazioni

$$\begin{cases} y' = y - c \\ x' = x \end{cases}$$

la funzione f possiede l'immagine f' descritta da

$$y' = b \cos x'$$

che rappresenta un coseno di ampiezza b. Con osservazioni analoghe alle precedenti possiamo concludere che il grafico di $y = b \cos x + c$ risulta essere quello di un coseno di opportuna ampiezza b traslato solo verticalmente di un tratto c.

2.2 Funzioni omogenee di secondo grado

Pure la *funzione omogenea di II grado* in seno e coseno può essere studiata con il metodo descritto nella precedente sezione. Difatti data la sua equazione generale

$$y = a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x + c \operatorname{sen} x \cos x + d \tag{2.8}$$

con a, b, c, d costanti reali note, utilizzando le formule di bisezione

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

* Tale "stiramento", nell'ambito di uno studio più completo sulle trasformazioni lineari, si esprime attraverso una semplice trasformazione affine.

e di duplicazione $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$, si può riscrivere la (2.8) come

$$\begin{aligned} y &= a\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + b\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + \frac{c}{2} \operatorname{sen} 2x + d \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos 2x + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}\cos 2x + \frac{c}{2}\operatorname{sen} 2x + d \\ &= \left(\frac{c}{2}\right)\operatorname{sen} 2x + \left(\frac{b-a}{2}\right)\cos 2x + \left(\frac{a+b}{2} + d\right) \end{aligned}$$

che con le posizioni

$$A = \frac{c}{2} \qquad B = \frac{b-a}{2} \qquad C = \frac{a+b}{2} + d$$

si trasforma in

$$y = A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x + C \tag{2.9}$$

che è una funzione lineare ma relativa all'angolo doppio $2x$. Ciò implica* che la periodicità di (2.9) sia pari a π anziché a 2π: difatti

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= A \operatorname{sen} 2(x+\pi) + B\cos 2(x+\pi) + C \\ &= A \operatorname{sen}(2x+2\pi) + B\cos(2x+2\pi) + C \\ &= A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x + C = f(x). \end{aligned}$$

La (2.9) a sua volta, e con il metodo della precedente sezione, si può ricondurre alla forma $y = E \operatorname{sen}(2x+\alpha) + C$ e quindi il suo grafico corrisponde a quello del seno opportunamente traslato ma dove un'oscillazione completa corrisponde ad un intervallo di ampiezza π.

Conviene infine osservare che le trasformazioni presentate per le funzioni lineari e omogenee hanno validità generale in quanto non c'è mai stata la necessità di imporre delle restrizioni alla variabile reale x.

---

* È immediato dimostrare che data una funzione del tipo $f(x) = \operatorname{sen} ax$ (oppure $f(x) = \cos ax$) questa risulta periodica con periodo $T = 2\pi/a$. Difatti

$$f(x + 2\pi/a) = \operatorname{sen} a(x + 2\pi/a) = \operatorname{sen}(ax + 2\pi) = \operatorname{sen} ax = f(x).$$

CAPITOLO 3

3.1 Equazioni e disequazioni omogenee

I metodi presentati precedentemente nello studio delle funzioni omogenee di I e II grado si possono estendere pure al problema della ricerca delle soluzioni di una equazione o disequazione lineare in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ così come alle omogenee di grado 2. Difatti volendo risolvere la disequazione lineare

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \geq 0$$

basta applicare ad essa il procedimento che la trasforma nella disequazione

$$A \operatorname{sen}(x + \alpha) + c \geq 0.$$

Questa è facilmente risolvibile dato che con pochi passaggi si può ricondurre ad una disequazione elementare avente la forma

$$\operatorname{sen}(x + \alpha) \geq -\frac{c}{A} \quad \text{se} \quad A > 0$$

oppure

$$\operatorname{sen}(x + \alpha) \leq -\frac{c}{A} \quad \text{se} \quad A < 0.$$

In modo del tutto analogo la disequazione omogenea di II grado

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x + c \operatorname{sen} x \cos x + d \geq 0$$

si può riscrivere con successive trasformazioni nella forma elementare

$$E \operatorname{sen}(2x + \alpha) + C \geq 0$$

da cui, a seconda del segno di E, discende la forma canonica

$$\operatorname{sen}(2x+\alpha) \geq -\frac{C}{E} \quad \text{se} \quad E>0$$

oppure

$$\operatorname{sen}(2x+\alpha) \leq -\frac{C}{E} \quad \text{se} \quad E<0$$

con $-C/E$ costante nota.

3.2 Metodi alternativi

Ai metodi di risoluzione presentati nella sezione precedente si affiancano altre metodologie pure di carattere generale, e che hanno per obiettivo la trasformazione della disequazione (o equazione) data in una disequazione (o equazione) razionale relativa ad una sola funzione goniometrica.

Nel caso della disequazione lineare

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \geq 0 \tag{3.1}$$

si dimostrano utili le identità che esprimono il seno e il coseno in termini della tangente dell'angolo metà ossia

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \tag{3.2}$$

Poiché queste valgono per $x \neq \pi + 2k\pi$ *va controllato preventivamente* se i valori $x = \pi + 2k\pi$ sono delle soluzioni della (3.1). A tal fine basta sostituire questi valori e verificare se la disuguaglianza che si ottiene risulta soddisfatta o meno. Successivamente considerando $x \neq \pi + 2k\pi$ e posto $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ si sostituiscono le (3.2) in (3.1) ottenendo

$$a\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + c \geq 0$$

da cui moltiplicando per $1+t^2>0$ discende

$$2at + b - bt^2 + c + ct^2 \geq 0$$

ossia

$$t^2(c-b) + 2at + (b+c) \geq 0$$

che costituisce un'espressione razionale nell'incognita ausiliaria t. La risoluzione della precedente conduce quindi a delle disequazioni elementari della funzione $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Analogamente le omogenee di II grado

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x + c \operatorname{sen} x \cos x + d \geq 0 \tag{3.3}$$

si riconducono ad una espressione razionale dividendo entrambi i membri per $\cos^2 x > 0$. Ovviamente e in modo analogo a quanto delineato sopra, vanno studiati a parte (e preventivamente) i valori dove risulta $\cos x = 0$ cioè in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ discende invece

$$a \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + b + c \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{d}{\cos^2 x} \geq 0$$

e poiché

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \quad \text{e} \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

risulta

$$a \operatorname{tg}^2 x + b + c \operatorname{tg} x + d(1 + \operatorname{tg}^2 x) \geq 0.$$

Posto $\operatorname{tg} x = t$ la precedente diviene una disequazione razionale di II grado nella variabile t

$$t^2(a + d) + ct + (b + d) \geq 0$$

la cui risoluzione conduce a delle disequazioni elementari della funzione $\operatorname{tg} x$.

Vogliamo infine trattare una forma particolare delle disequazioni lineari ma che si incontra abbastanza di frequente nei problemi e cioè il caso in cui sia nullo il termine noto c. Allora la disequazione assume la forma

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x \geq 0 \tag{3.4}$$

e ai metodi già discussi si aggiungono altre due possibili alternative.

La prima consiste nello studiare a parte il caso $\cos x = 0$ ossia va analizzato se i valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono delle soluzioni della (3.4) e successivamente, nell'ipotesi che sia $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e fattorizzando il $\cos x$, la disequazione si può riscrivere come

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos x(a \operatorname{tg} x + b) \geq 0 :$$

di conseguenza si possono ottenere le sue soluzioni tramite lo studio del segno dei due fattori.

In alternativa, a seconda delle ipotesi sul segno di $\cos x$, la disequazione (3.4) risulta equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ a \operatorname{tg} x + b \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x < 0 \\ a \operatorname{tg} x + b \leq 0 \end{cases}$$

e nel caso sia $\cos x = 0$, ancora una volta vanno trattati a parte i valori $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Come si può ben vedere anche i metodi generali presentati inizialmente in questa sezione necessitano di alcune ipotesi restrittive che obbligano ad uno studio separato per alcuni valori della variabile. Questa limitazione non sussiste invece per i metodi della sezione 3.1.

3.3 Tavola riassuntiva dei metodi discussi

DISEQUAZIONI LINEARI

<u>METODI GENERALI</u>

1) $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad A \operatorname{sen}(x+\alpha) + c \geq 0$

Non contiene limitazioni su x.

2) $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad A \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} + B \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + C \geq 0$
per $\quad x \neq \pi + 2k\pi$.

$x = \pi + 2k\pi$ si deve studiare a parte.

<u>METODI PARTICOLARI: $c = 0$</u>

3) $a \operatorname{sen} x + b \cos x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos x(a \operatorname{tg} x + b) \geq 0 \quad$ per $\quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Si studia il segno di entrambi i fattori e, a parte, il caso $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ dove $\cos x = 0$.

4) $a \operatorname{sen} x + b \cos x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \cos x > 0 \\ a \operatorname{tg} x + b \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x < 0 \\ a \operatorname{tg} x + b \leq 0 \end{cases}$

Si studia a parte il caso $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ dove $\cos x = 0$.

DISEQUAZIONI OMOGENEE DI II GRADO

<u>METODI GENERALI</u>

1) $a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x + c \operatorname{sen} x \cos x + d \geq 0$
$\Longrightarrow \quad A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x + C \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad E \operatorname{sen}(2x + \alpha) + C \geq 0$

Non contiene limitazioni su x.

2) $a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x + c \operatorname{sen} x \cos x + d \geq 0$
$\Longrightarrow \quad A \operatorname{tg}^2 x + B \operatorname{tg} x + C \geq 0 \quad$ se $\quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ si deve studiare a parte.